Том 27, № 138 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182
УДК 517.953

Свойства одного матрично-дифференциального оператора высокого порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В статье рассматривается линейный матрично-дифференциальный оператор n-го порядка вида $\mathbb{A}^n$. Устанавливается операторный аналог бинома Ньютона, с помощью которого для операторов $\mathbb{A}^n$ и $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$ получено аналитическое выражение. Приводится лемма о решении линейного уравнения, которая применяется при исследовании абстрактной задачи Коши для алгебро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве с кубом оператора A при старшей производной. Оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом. Методом каскадного расщепления уравнения и условий на, соответственно, уравнения и условия в подпространствах меньших размерностей определены условия существования, единственности решения, и найдено это решение. Как приложение, полученные результаты при $n = 3$ применяются при решении смешанной задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка. К таким уравнениям относится обобщенное волновое уравнение на мелкой воде, обобщенное уравнение Лиувилля.

Ключевые слова: линейный матрично-дифференциальный оператор, высокий порядок, 0-нормальное собственное число, алгебро-дифференциальное уравнение, банахово пространство, уравнение в частных производных четвертого порядка

Для цитирования: *Усков В.И.* Свойства одного матрично-дифференциального оператора высокого порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 138. С. 175–182. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182

Properties of one higher order matrix-differential operator

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. The article considers a linear matrix-differential operator of the n-th order of the form $\mathbb{A}^n$. For it and for the operator $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$, an analytical expression is derived, for which an operator analog of the Newton binomial is obtained. A lemma on the solution of a linear equation is given. It is used in the study of the abstract Cauchy problem for an algebro-differential equation in a Banach space with the cube of the operator A at the highest derivative. The operator A has the property of having 0 as a normal eigenvalue. Conditions for the existence and uniqueness of the solution are determined; the solution is found, for which the method of cascade splitting of the equation and conditions into the corresponding equations and conditions in subspaces of lower dimensions is used. As an application, the results obtained for $n = 3$ are used in solving a mixed problem for a fourth-order partial differential equation. These equations include the generalized shallow water wave equation and the generalized Liouville equation.

Keywords: linear matrix-differential operator, higher order, 0-normal eigenvalue, algebro-differential equation, Banach space, fourth order partial-differential equation

Mathematics Subject Classification: 35G16.

For citation: Uskov V.I. Svoystva odnogo matrichno-differentsial'nogo operatora vysokogo poryadka [Properties of one higher order matrix-differential operator]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 138, pp. 175–182. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-138-175-182. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматривается действующий в пространстве непрерывных двухкомпонентных функций линейный оператор n-го порядка $\mathbb{A}^n$, где $\mathbb{A} = \dfrac{d}{dx} + R$, R задается числовой матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. Для произвольных линейных операторов A, B получен аналог бинома Ньютона, с помощью которого выведено аналитическое выражение для оператора $\mathbb{A}^n$ и для оператора $(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n$, где сужение $\tilde{\mathbb{A}}$ оператора $\mathbb{A}$ в инвариантном подпространстве M обратимо.

На основании этих результатов исследуется абстрактная задача Коши для алгебро-дифференциального уравнения в банаховом пространстве с кубом оператора при старшей производной, являющегося 0-NEV оператором, т.е. обладающего свойством иметь 0 нормальным собственным числом. Определены условия существования, единственности решения и найдено это решение, для чего используется метод каскадного расщепления уравнения и условий на уравнения и условия в подпространствах меньших размерностей.

Как показано в [1], оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством 0-NEV, что позволяет применить полученный результат к решению смешанной задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка с оператором $\mathbb{A}^3$ при производной по выделенной переменной t. К уравнениям в частных производных четвертого порядка относятся обобщенное волновое уравнение на мелкой воде, обобщенное уравнение Лиувилля [2]. Такие уравнения в других работах решались сведением к интегральному уравнению введением функции Римана [3], методом Ибрагимова [4], методом функционального разделения переменных [5] и т. д.

1. Аналог бинома Ньютона для линейных операторов

Пусть $P(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ — количество перестановок с повторениями i_1 элементов первого вида, i_2 элементов второго вида, …, i_m элементов m-го вида:

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_m) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_m)!}{i_1!\, i_2! \, \ldots \, i_m!}.$$

Справедливо следующее мультиномиальное тождество.

Лемма 1.1.

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_m) = P(i_1 - 1, i_2, \ldots, i_m) + P(i_1, i_2 - 1, \ldots, i_m) + \ldots + P(i_1, i_2, \ldots, i_m - 1).$$

Лемма 1.1 доказана в работе [6].

Имеет место аналог бинома Ньютона для линейных операторов.

Теорема 1.1. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — линейные операторы, попарно перестановочные по умножению. Тогда*

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)^n = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n}} P(i_1, i_2, \ldots, i_m) A_1^{i_1} A_2^{i_2} \ldots A_m^{i_m}.$$

Теорема 1.1 доказывается методом математической индукции по n с применением леммы 1.1.

Пусть $C_n^i = P(n - i, i)$ — количество сочетаний из n элементов по i элементов. Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть A, B — линейные операторы, попарно переместительные по умножению. Тогда*

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i.$$

2. О степени одного матрично-дифференциального оператора

Пусть заданы вещественные α, β, $\gamma > 0$, $\gamma^2 = -\alpha\beta > 0$. Обозначим $\mathfrak{X}_\gamma = [0; 2\pi/\gamma]$ и определим банахово пространство

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \ y_i(x) \in C(\mathfrak{X}_\gamma), \ \ i = 1, 2 \right\}.$$

Рассмотрим в этом пространстве оператор

$$\mathbb{A} = \frac{d}{dx} + R, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom} \mathbb{A} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \ y_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}_\gamma), \ y_i(0) = y_i(2\pi/\gamma), \ \ i = 1, 2 \right\}.$$

Для определяемого соотношениями (2.1) оператора $\mathbb{A}$ в работе [1] доказаны следующие утверждения, которые приведем здесь в виде лемм.

Лемма 2.1. *Оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством* 0-NEV.

Лемма 2.2. *Элементы ядра оператора $\mathbb{A}$ не имеют присоединенных элементов.*

Для матрицы R имеет место следующее очевидное утверждение.

Предложение 2.1.

$$R^{2j-2} = (-1)^{j-1} \gamma^{2j-2} I, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Применив предложение 2.1, получим представление некоторых операторных функций от R.

Утверждение 2.1.

$$\sin R = (-\gamma^{-1} \sin\gamma) R, \quad \cos R = (\mathrm{ch}\gamma) I, \quad \exp R = (\cos\gamma) I + (\gamma^{-1}\sin\gamma) R.$$

Далее, пусть $[r]$ — целая часть числа r. Вычисления с применением следствия 1.1, утверждения 2.1 и леммы 2.2 приводят к следующим теоремам.

Теорема 2.1.

$$\mathbb{A}^n = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2j} (-1)^j \gamma^{2j} \frac{d^{n-2j}}{dx^{n-2j}} + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} C_n^{2j-1} (-1)^{j-1} \gamma^{2j-2} R \frac{d^{n+1-2j}}{dx^{n+1-2j}}.$$

Теорема 2.2.

$$(\tilde{\mathbb{A}}^{-1})^n = (-1)^n I\left(K_n^{(1)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi}L_n^{(1)}(x)\right) + (-1)^{n+1}\gamma^{-1}R\left(K_n^{(2)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi}L_n^{(2)}(x)\right)$$

в обозначениях:

$$K_n^{(1)}(x) = \int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)\cos(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$K_n^{(2)}(x) = \int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)\sin(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$L_n^{(1)}(x) = \int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)s_0\cos(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0,$$

$$L_n^{(2)}(x) = \int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_{s_0}^{2\pi/\gamma}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{2\pi/\gamma}(\cdot)s_0\sin(\gamma(x-s_{n-1}))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\ldots ds_1\,ds_0.$$

3. Решение линейного уравнения

Пусть A — линейный 0-NEV оператор, действующий в банаховом пространстве E. Пусть корневое подпространство N состоит лишь из элементов ядра $\operatorname{Ker} A$, не имеющих присоединенных элементов, а M — дополнительное к нему инвариантное подпространство. Ядро полагается двумерным: $N = \{c_1e_1 + c_2e_2\}$, $e_1, e_2 \in E$.

Обозначим P — проектор на N, Q — проектор на M, $\tilde{A}$ — сужение оператора A на M, I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. В N вводится скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ так, что $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Линейное уравнение* $A^n v = w$, $v \in \operatorname{dom} A^n \cap E$, $w \in E$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильно системе*

$$v = Hw + Pv,$$

$$\langle Pw, e_j\rangle = 0, \quad j = 1, 2,$$

в обозначении

$$H = (\tilde{A}^{-1})^n Q.$$

Лемма 3.1 обобщает результат, доказанный в работе [7].

4. Решение задачи Коши для алгебро-дифференциального уравнения

Рассматривается задача

$$A^3\frac{du}{dt} = Bu(t), \tag{4.1}$$

$$u(0) = u^0 \in E, \tag{4.2}$$

где A, B — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве E; $\overline{\operatorname{dom} A^3} = E$; $\overline{\operatorname{dom} B} = E$; A является 0-NEV-оператором с двумерным ядром; элементы ядра не имеют присоединенных; $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k]$.

Под решением задачи (4.1), (4.2) подразумевается функция $u(t)$, дифференцируемая на $\mathfrak{T}$ и удовлетворяющая (4.1), (4.2) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Обозначим

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \langle PBe_1, e_1 \rangle & \langle PBe_2, e_1 \rangle \\ \langle PBe_1, e_2 \rangle & \langle PBe_2, e_2 \rangle \end{pmatrix}$$

и будем предполагать, что выполнено следующее условие

$$\Delta \neq 0. \tag{4.3}$$

Определим

$$T(\cdot) = HB(\cdot) + \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} -\langle PBHB(\cdot), e_1 \rangle & \langle PBe_2, e_1 \rangle \\ -\langle PBHB(\cdot), e_2 \rangle & \langle PBe_2, e_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot e_1$$
$$+ \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} \langle PBe_1, e_1 \rangle & -\langle PBHB(\cdot), e_1 \rangle \\ \langle PBe_1, e_2 \rangle & -\langle PBHB(\cdot), e_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot e_2.$$

Аналогично [7] с применением леммы 3.1 получен следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть справедливо неравенство* (4.3) *и пусть оператор* T *ограничен. Тогда при выполнении условия*

$$\langle Pu^0, e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \tag{4.4}$$

решение задачи (4.1), (4.2) *существует, это решение единственно, имеет вид*

$$u(t) = \exp(tT)u^0$$

и удовлетворяет соотношению

$$\langle Pu(t), e_j \rangle \equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

5. Пример

Пусть на отрезке $\mathfrak{X}_2 = [0; \pi]$ задана непрерывная функция $g(x)$, удовлетворяющая условию

$$g(0) = g(\pi). \tag{5.1}$$

В прямоугольнике $\Pi = \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{T}$ рассмотрим задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + R \right)^3 \frac{\partial u}{\partial t} = B(x)u(x,t), \tag{5.2}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t), \tag{5.3}$$

с операторами

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^x (\cdot)\, ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Под решением задачи (5.2), (5.3) подразумевается функция $u(x,t)$, дифференцируемая по $t \in \mathfrak{T}$ при каждом $x \in \mathfrak{X}_2$, трижды непрерывно дифференцируемая по $x \in \mathfrak{X}_2$ при каждом $t \in \mathfrak{T}$, интегрируемая по x на Π, удовлетворяющая равенству $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ и (5.2), (5.3) на Π.

Лемма 2.1 позволяет применить результаты, полученные выше в секции 4. В работе [7] выписаны подпространства M, N, проектор P на N, оператор $\tilde{\mathbb{A}}^{-1}$. Вычисления показывают следующее.

Условие (4.3) выполнено: $\Delta = 1/16 \neq 0$.

Возьмем некоторую функцию $f(x)$ и пусть $f_1(x)$ — ее первая компонента. В обозначениях

$$\psi_1(x) = \int\limits_0^x f_1(s)\,ds, \quad \psi_2(x) = \big(-K_3^{(1)}(x) + \frac{1}{\pi} L_3^{(1)}(x)\big)\psi_1(x),$$

$$\psi_3(x) = \big(-2K_3^{(2)}(x) + \frac{2}{\pi} L_3^{(2)}(x)\big)\psi_1(x), \quad \psi_4(x) = \int\limits_0^x \psi_2(s)\,ds$$

получим выражение для оператора T :

$$T(x)f(x) = \begin{pmatrix} \psi_2(x) + \dfrac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi_4(s)\sin(2(x-s))\,ds \\ \psi_3(x) - \dfrac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi \psi_4(s)\cos(2(x-s))\,ds \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор ограничен и сильно непрерывен в пространстве $C(\mathfrak{X}_2)$.

Далее заметим, что условие (4.4) записывается в виде равенства

$$\int\limits_0^\pi \mu(s)\cos 2s\,ds = \int\limits_0^\pi \mu(s)\sin 2s\,ds = 0, \quad \text{где} \quad \mu(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds. \tag{5.5}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $\mathfrak{X}_2$ и удовлетворяет условиям (5.1) и (5.5). Тогда решение задачи (5.2), (5.3) существует, это решение единственно и равно*

$$u(x,t) = \exp\big(tT(x)\big)\,g(x),$$

где оператор T определяется формулой (5.4).

References

[1] S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, "Degeneracy property of a matrix-differential operator and applications", *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 640–652.

[2] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman&Hall / CRC Press, Boca Raton–London–New York, 2004.

[3] Т. Д. Асылбеков, М. К. Чамашев, "Коэффициентная обратная задача для линейного уравнения в частных производных четвертого порядка", *Известия Томского политехнического университета*, **317**:2 (2010), 22–25. [T. D. Asylbekov, M. K Chamashev, "Coefficient inverse problem for a linear partial differential equation of the fourth order", *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, **317**:2 (2010), 22–25 (In Russian)].

[4] N. H. Ibragimov, "A new Conversation laws theorem", *Journal of Mathematical Analysis*, **333**:1 (2007), 311–328.

[5] И. В. Рахмелевич, "О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями", *Владикавсказский математический журнал*, **18**:4 (2016), 41–49. [I. V. Rahmelevich, "On solutions of a multidimensional differential equation of arbitrary order with mixed highest partial derivative and power nonlinearities", *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **18**:4 (2016), 41–49 (In Russian)].

[6] Я. А. Афанасова, "Мультиномиальное тождество и его приложения", *Классические и прикладные аспекты преемственной математической подготовки в ВУЗе: исторический и современный взгляд молодых ученых и соискателей высшего образования*, Материалы Всеукраинской научно-практической конференции (Харьков, 2021), Тезисы докладов, 2021, 194–197. [Ya. A. Afanasova, "Multinomial identity and its applications", *Classical and Applied Aspects of Successive Mathematical Training at the University: Historical and Modern View of Young Scientists and Applicants for Higher Education*, Materials of the All-Ukrainian Scientific and Practical Conference (Kharkiv, 2021), Abstracts, 2021, 194–197 (In Russian)].

[7] В. И. Усков, "Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 68–76. [V. I. Uskov, "Solution of a problem for a system of third order partial differential equations", *Russian University Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 68–76 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2022 г.
Принята к публикации 09.06.2022 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 17.02.2022
Reviewed 26.05.2022
Accepted for press 09.06.2022